pi

De la Wikipedia, enciclopedia liberă

Pentru alte sensuri, vedeți Pi (dezambiguizare).

Dacă diametrul cercului este 1, circumferința sa va fi π

Numărul **π** (adesea scris **pi**) este o constantă matematică a cărei valoare este raportul dintre circumferința și diametrul oricărui cerc într-un spațiu euclidian; este aceeași valoare ca și raportul dintre aria unui cerc și pătratul razei sale. Simbolul π a fost propus pentru prima oară de matematicianul galez William Jones în 1706. Valoarea constantei este egală aproximativ cu 3,14159 în notația zecimală obișnuită (vezi tabelul din dreapta pentru reprezentarea în alte baze). π este una dintre cele mai importante constante din matematică și fizică: numeroase formule din matematică, inginerie și alte științe implică folosirea lui π.[5]

Numere iraționale și probabil iraționale:

γ – φ – e – π

Sistem de numerație	Evaluarea lui π
Binar	11.00100 10000 11111 10110…[1]
Zecimal	3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288…
Hexazecimal	3.243F6 A8885 A308D 31319…[2]
Aproximări raționale	3, $^{22}/_{7}$, $^{333}/_{106}$, $^{355}/_{113}$, $^{103993}/_{33102}$, …[3] (în ordinea crescătoare a preciziei)
Fracții continue	[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, …][4] (Această fracție continuă nu este periodică.)
Trigonometrie	π radiani = 180 grade

π este un număr irațional, adică valoarea sa nu poate fi exprimată exact sub formă de fracție *m*/*n*, cu *m* și *n* întregi. De aceea, reprezentarea sa zecimală nu are sfârșit și nu începe nici să se repete. Numărul este și transcendent, ceea ce înseamnă, printre altele, că nu există un șir finit de operații algebrice cu numere întregi (puteri, extrageri de radicali, sume etc.) al căror rezultat să fie egal cu valoarea lui; demonstrarea acestui fapt a fost o realizare relativ recentă în istoria matematicii și un rezultat semnificativ al matematicienilor germani ai secolului al XIX-lea. De-a lungul istoriei matematicii s-au depus eforturi semnificative de a determina π cu mai multă precizie și de a-i înțelege natura; fascinația acestui număr a intrat și în cultura nematematică.

Litera grecească π, scrisă *pi* în alfabetul latin, a fost adoptată de la cuvântul grecesc „περίμετρος”, *perimetros* (în română: perimetru), mai întâi de William Jones în 1707; notația a fost popularizată apoi de Leonhard Euler în 1737.[6]

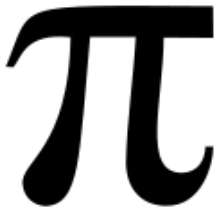
Cuprins

Bazele
- Litera π
- Definiție
- Iraționalitate și transcendență
- Valoarea numerică
- Calculul lui π

Istorie
- Perioada geometrică
- Perioada clasică
- Calculul în era calculatoarelor

Pi și fracțiile continue
Memorarea cifrelor
Proprietăți avansate
Aproximări numerice
Întrebări deschise
Utilizare în matematică și științe
Geometrie și trigonometrie
Numere complexe și analiza matematică
Fizică
Statistică și probabilități
Notarea lui 2π cu τ
Ziua pi
Note
Bibliografie
Legături externe

Bazele

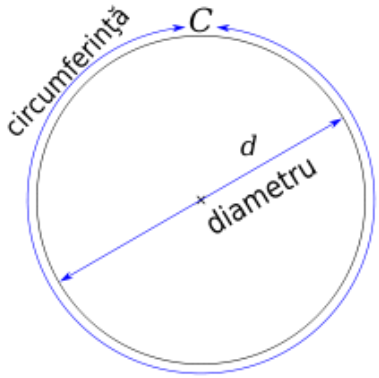


Litera grecească π utilizată pentru notarea constantei.

Litera π

Numele literei greceşti π este *pi*, scriere utilizată în unele situaţii în care nu este disponibil simbolul grecesc, sau în care utilizarea sa ar fi problematică. π corespunde literei române (latine) p. Nu se notează cu literă mare (Π) nici măcar la început de propoziţie.

Constanta se numeşte „π” deoarece este prima literă a cuvintelor greceşti περιφέρεια (*perifereia* = periferie) şi περίμετρος (*perimetros* = perimetru), probabil cu referire la utilizarea sa în formula de calcul a circumferinţei (sau a perimetrului) unui cerc.[7] π este caracterul Unicode U+03C0 („Litera grecească mică pi”).[8]



Circumferința = π × diametru

Definiție

În geometria plană euclidiană, π este definit ca raportul dintre circumferinţa unui cerc şi diametrul său:[7]

$$\pi = \frac{C}{d}.$$

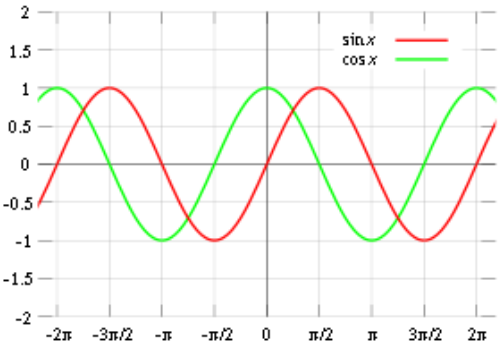
Raportul C/d este constant, indiferent de dimensiunile unui cerc. De exemplu, dacă un cerc are de două ori diametrul d al unui alt cerc, el va avea de două ori circumferinţa C, păstrând raportul C/d.

Altfel, π poate fi definit şi ca raportul dintre aria (A) unui cerc şi aria unui pătrat cu latura egală cu raza cercului:[7][9]

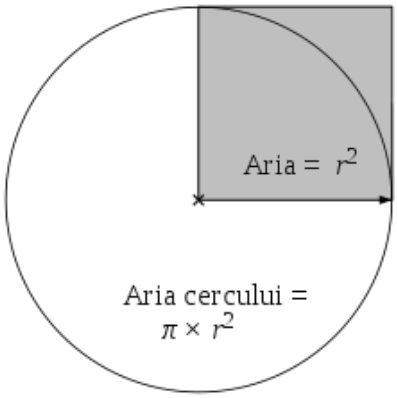
$$\pi = \frac{A}{r^2}.$$

Aceste definiţii depind de rezultatele geometriei euclidiene, cum ar fi faptul că toate cercurile sunt asemenea. Aceasta poate fi considerată o problemă atunci când π apare în domenii matematice care altfel nu implică geometria. Din acest motiv, matematicienii preferă adesea să definească π fără referire la geometrie, alegând în schimb ca definiţie una dintre

proprietățile sale analitice. O alegere frecventă este definirea lui π ca fiind dublul celui mai mic număr pozitiv *x* pentru care cos(*x*) = 0.[10] Formulele de mai jos ilustrează alte definiții echivalente.



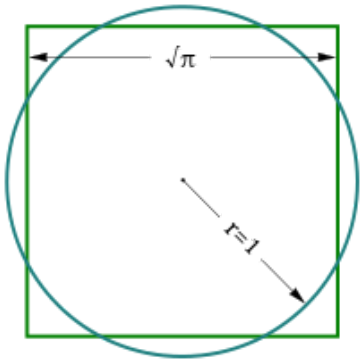
Graficul funcției *cosinus*, cu verde.



Aria cercului = π × aria pătratului umbrit

Iraționalitate și transcendență

π este un număr irațional, sau altfel spus, el nu poate fi scris ca raport (rație) de două numere întregi. Ipoteza iraționalității lui π este menționată încă de Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī[11] în secolul al IX-lea. Maimonides menționează în secolul al XII-lea că este sigur de iraționalitatea lui π [12]. Însă demonstrația completă a fost realizată abia în 1768 de către Johann Heinrich Lambert.[13] În secolul al XX-lea s-au construit demonstrații ce nu necesită decât cunoștințe de calcul integral. Una dintre acestea i se datorează lui Ivan Niven.[14][15] O demonstrație oarecum similară este cea a lui Mary Cartwright.[16]



Construirea unui pătrat cu aceeași arie ca un cerc dat este o problemă cunoscută încă din antichitate. Însă în 1882 s-a demonstrat că π este un număr transcendent, și deci un asemenea pătrat nu poate fi construit într-un număr finit de pași folosind numai rigla și compasul.

π este în același timp și număr transcendent, sau cu alte cuvinte, nu există niciun polinom cu coeficienți raționali care să-l aibă pe π ca rădăcină.[17] Acest fapt a fost demonstrat la 26 noiembrie 1882 de către Ferdinand von Lindemann la un seminar matematic al Universității din Freiburg. O consecință importantă a transcendenței lui π este faptul că nu este construibil geometric. Întrucât coordonatele tuturor punctelor ce pot fi construite cu rigla și compasul sunt numere construibile, nu se poate construi cu rigla și compasul un pătrat cu arie egală cu cea a unui cerc dat.[18] Aceasta are o importantă semnificație istorică, deoarece această problemă, numită "cuadratura cercului", este una dintre problemele elementare de geometrie cele mai ușor de înțeles datând din antichitate. În vremurile moderne numeroși amatori au încercat să rezolve problema, dar chiar dacă tentativele lor au fost uneori ingenioase, ele sunt întotdeauna sortite eșecului.

Valoarea numerică

Reprezentarea zecimală a lui π trunchiat la 50 de zecimale este:[19]

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510

Vedeți legăturile externe pentru variante cu mai multe zecimale.

Deși reprezentarea zecimală a lui π a fost calculată cu mai mult de 10^{12} cifre,[20] unele aplicații elementare, cum ar fi calculul circumferinței unui cerc, vor necesita mai puțin de 12 zecimale exacte. De exemplu, o valoare trunchiată la 11 zecimale este suficient de precisă pentru a calcula circumferința unui cerc de dimensiunile pământului cu precizie de un milimetru, iar una cu 39 de zecimale exacte este suficientă pentru a calcula circumferința oricărui cerc care încape în universul observabil cu o precizie comparabilă cu dimensiunea unui atom de hidrogen.[21][22]

Întrucât π este număr irațional, el are un număr infinit de zecimale care nu conțin secvențe ce se repetă. Acest șir infinit de cifre a fascinat numeroși matematicieni și s-au depus eforturi semnificative în ultimele secole pentru a calcula mai multe cifre zecimale și de a investiga proprietățile acestui număr.[23] În ciuda muncii analitice și a calculelor realizate pe supercalculatoare care au calculat 10 mii de miliarde de cifre ale lui π, nu a apărut niciun șablon identificabil în cifrele găsite.[24] Cifrele lui π sunt disponibile pe multe pagini web, și există software pentru calcularea lui π cu miliarde de cifre precizie pentru orice calculator personal.

Calculul lui π

π poate fi estimat empiric prin desenarea unui cerc mare, urmată de măsurarea diametrului și circumferinței sale și împărțirea circumferinței la diametru. O altă abordare geometrică, atribuită lui Arhimede,[25] este calculul perimetrului, P_n , unui poligon regulat cu *n* laturi circumscris unui cerc de diametru *d*. Atunci

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{d}.$$

Adică cu cât mai multe laturi are un poligon, cu atât mai apropiată este aproximarea lui π. Arhimede a determinat acuratețea acestei abordări comparând perimetrul poligonului circumscris cu diametrul unui poligon regulat cu același număr de laturi înscris în cerc. Folosind un poligon cu 96 de laturi, el a calculat că: $3^{10}\!/_{71} < \pi < 3^{1}\!/_{7}$.[26]

π poate fi calculat și folosind metode pur matematice. Majoritatea formulelor utilizate pentru calculul valorii lui π au proprietăți matematice dorite, dar sunt dificil de înțeles fără cunoștințe de trigonometrie și analiză matematică. Unele, însă, sunt foarte simple cum este de exemplu această formă a seriei Gregory-Leibniz:[27]

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \cdots.$$

Deși această serie este ușor de scris și calculat, nu este evident de ce rezultatul ei este π. În plus, această serie converge atât de încet încât trebuie calculați aproape 300 de termeni pentru a obține o aproximare a lui π cu 2 zecimale exacte.[28] Calculând această serie într-o manieră mai inteligentă, luând mediile sumelor parțiale, ea poate fi făcută să conveargă mult mai rapid. Fie

$$\pi_{0,1} = \frac{4}{1},\ \pi_{0,2} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3},\ \pi_{0,3} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5},\ \pi_{0,4} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7}, \cdots$$

și atunci se definește

$$\pi_{i,j} = \frac{\pi_{i-1,j} + \pi_{i-1,j+1}}{2} \text{ pentru fiecare } i, j \geq 1$$

apoi se calculează $\pi_{10,10}$ într-un timp de calcul echivalent cu calculul a 150 de termeni ai seriei originale cu metoda forței brute și $\pi_{10,10} = 3.141592653\ldots$, aproximare cu 9 zecimale exacte. Acest calcul este un exemplu de transformare van Wijngaarden.[29]

Istorie

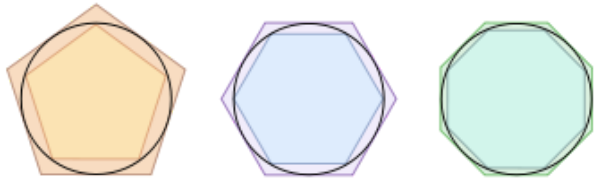
Cea mai veche utilizare atestată a unei bune aproximări a lungimii unei circumferințe în raport cu raza este 3+1/7, valoare folosită la proiectele piramidelor din Vechiul Regat al Egiptului. Marea Piramidă din Giza, construită în 2550-2500 î.e.n., a fost construită cu un perimetru de 1.760 cubiți și o înălțime de 280 cubiți; raportul 1.760/280 ≈ 2π. Egiptologi ca profesorii Flinders Petrie [30] și I.E.S Edwards[31] au arătat că aceste proporții circulare au fost alese deliberat de către scribii și arhitecții Vechiului Regat, din motive simbolice.[32][33] Aceleași proporții apotropaice fuseseră utilizate și la Piramida de la Meidum din anul 2600 î.e.n. Aceste aplicații au fost relevate arheologic, întrucât nu există dovezi scrise din perioada respectivă.

Istoria veche a lui π în documente scrise urmează dezvoltarea matematicii în ansamblul ei.[34] Unii autori împart progresul în trei perioade: perioada veche, în care π a fost studiat geometric, epoca clasică de după dezvoltarea analizei matematice în Europa în preajma secolului al XVII-lea, și era calculatoarelor numerice.[35]

Perioada geometrică

Faptul că raportul dintre circumferința și diametrul unui cerc este același pentru toate cercurile indiferent de mărime, și că este cu puțin mai mare ca 3, a fost cunoscut în antichitate geometrilor Egiptului, Babilonului, Indiei și Greciei. Primele documente ce dovedesc aproximări ale acestui număr datează din preajma anului 1900 î.e.n.; acestea sunt 25/8 (Babilon) și 256/81 (Egipt), ambele aproximări de 1% ale valorii reale.[7] Textul indian *Shatapatha Brahmana* dă pentru π valoarea 339/108 ≈ 3,139. Biblia evreiască pare să sugereze, în Cartea Regilor, că π = 3, aproximare semnificativ mai slabă decât alte estimări disponibile la momentul scrierii ei (600 î.e.n.). Interpretarea pasajului este în discuție,[36][37] unii considerând că raportul 3:1 este cel între circumferința interioară și diametrul exterior al unui bazin cu pereți subțiri, raport ce ar putea fi destul de precis, în funcție de grosimea pereților.

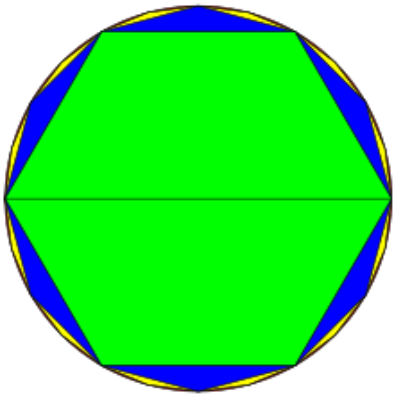
Arhimede (287–212 î.e.n.) a fost primul care a încercat să calculeze valoarea lui π cu rigurozitate. El și-a dat seama că această mărime poate fi limitată superior și inferior înscriind cercurile în poligoane regulate și calculând perimetrul poligoanelor exterioare și respectiv interioare:[37]



Aproximarea lui pi după Arhimede

Folosind echivalentul unui poligon cu 96 de laturi, el a demonstrat că 3 + 10/71 < π < 3 + 1/7.[37] Media acestor valori este aproximativ 3,14185.

În secolele ce au urmat s-au făcut și alte dezvoltări în India și China. În preajma anului 265 e.n., matematicianul Liu Hui din Regatul Wei a găsit un algoritm iterativ simplu și riguros pentru calculul lui π la orice grad de precizie. El însuși a efectuat calculul până la un poligon cu 3072 laturi și a obținut o valoare aproximativă pentru π de 3,1416, după cum urmează:



Algoritmul π al lui Liu Hui

$$\pi \approx A_{3072} = 3 \cdot 2^8 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}} \approx 3,14159$$

Ulterior, Liu Hui a inventat o metodă rapidă de calcul și a obținut valoarea aproximativă 3,1416 cu un poligon de doar 96 de laturi, profitând de faptul că diferența de arie a poligoanelor succesive formează o progresie geometrică de factor 4.

În secolul al V-lea e.n. matematicianul indian Aryabhta a aproximat numărul pi ca 3,1416; el a fost primul care a și afirmat că este o aproximație și că valoarea originală este un număr irațional[38].

Pe la 480, matematicianul chinez Zu Chongzhi a demonstrat că π ≈ 355/113, și a arătat că 3,1415926 < π < 3,1415927 cu ajutorul algoritmului lui Liu Hui aplicat pe un poligon cu 12288 laturi. Această valoare a fost cea mai precisă aproximare a lui π disponibilă în următorii 900 de ani.

Perioada clasică

Până la începutul mileniului II, π a fost cunoscut cu o precizie de mai puțin de 10 zecimale exacte. Următoarea descoperire majoră în studierea lui π a venit cu dezvoltarea seriilor infinite și, ulterior, cu descoperirea analizei matematice, care în principiu permite calculul lui π cu orice precizie dorită prin adăugarea oricât de multor termeni. Pe la 1400, Madhava din Sangamagrama a găsit prima astfel de serie:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

Aceasta este cunoscută astăzi sub numele de seria Madhava–Leibniz[39][40] sau seria Gregory-Leibniz deoarece a fost redescoperită de James Gregory și Gottfried Leibniz în secolul al XVII-lea. Din păcate, viteza de convergență este prea mică pentru a fi practic calculul mai multor cifre zecimale; trebuie adunați aproximativ 4000 de termeni pentru a îmbunătăți estimarea lui Arhimede. Transformând, însă, seria în

$$\pi = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^{-k}}{2k+1} = \sqrt{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{3})^k}{2k+1} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots\right)$$

Madhava a reușit să calculeze π ca fiind 3,14159265359, cu 11 zecimale exacte. Acest record a fost depășit în 1424 de matematicianul persan Jamshīd al-Kāshī, care a calculat 16 zecimale ale lui π.

Prima contribuție europeană majoră de după Arhimede a fost cea a matematicianului german Ludolph van Ceulen (1540–1610), care a folosit o metodă geometrică de calcul a 35 de zecimale ale lui π. El a fost atât de mândru de calculul său, căruia i-a dedicat o mare parte din viața sa, încât a cerut ca cifrele să-i fie gravate pe piatra de mormânt.[41]

În aceeași perioadă, în Europa au început să apară metodele analizei matematice și pentru determinarea seriilor și produselor infinite pentru cantități geometrice. Prima astfel de reprezentare a fost formula lui Viète,

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

descoperită de François Viète în 1593. Un alt rezultat celebru este produsul lui Wallis,

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots = \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\cdots$$

descoperit de John Wallis în 1655. Isaac Newton a calculat și el o serie pentru π și a calculat 15 cifre, deși ulterior a mărturisit: „Mi-e rușine să vă spun la câte cifre am ajuns cu calculele, neavând altceva de făcut atunci.”[42]

În 1706 John Machin a fost primul care a calculat 100 de zecimale ale lui π, folosind formula

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

cu

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Formulele de acest tip, denumite azi formule de tip Machin, au fost utilizate pentru a stabili câteva recorduri succesive și au rămas cea mai celebră metodă de calcul al lui π inclusiv în era calculatoarelor. Un record remarcabil a fost cel stabilit de geniul calculului Johann Dase, care în 1844 a folosit o formulă de tip Machin pentru a calcula 200 de zecimale ale lui π mintal la îndemnul lui Gauss. Cea mai bună valoare la sfârșitul secolului al XIX-lea i s-a datorat lui William Shanks, care a petrecut 15 ani calculând π cu 707 zecimale exacte, deși, din cauza unei greșeli, doar primele 527 erau corecte. (Pentru a evita astfel de greșeli, calculele moderne de orice fel se efectuează adesea de două ori, cu două formule diferite. Dacă rezultatele sunt identice, atunci este probabil că sunt și corecte.)

Progresele teoretice din secolul al XVIII-lea au relevat noi informații despre natura lui π, informații ce nu ar fi apărut doar din calculele numerice. Johann Heinrich Lambert a demonstrat iraționalitea lui π în 1761, iar Adrien-Marie Legendre a demonstrat și el în 1794 că π^2 este irațional. Când Leonhard Euler în 1735 a demonstrat celebra problemă Basel – găsirea valorii exacte a lui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

care este $\pi^2/6$, el a demonstrat o profundă conexiune între π și numerele prime. Atât Legendre cât și Euler au speculat că π ar putea fi transcendent, ceea ce s-a demonstrat în 1882 de către Ferdinand von Lindemann.

S-a spus despre cartea lui William Jones *O nouă introducere în matematică* din 1706 că este prima în care s-a folosit litera grecească π pentru această constantă, dar notația a devenit deosebit de populară după ce a adoptat-o Leonhard Euler în 1737.[43] El a scris:

> Există numeroase alte feluri de a găsi lungimile sau ariile unor anumite linii curbe sau drepte, care ar putea facilita practica foarte mult; ca de exemplu, la cerc, diametrul este față de circumferință ca 1 față de $(16/5 - 4/239) - 1/3(16/5^3 - 4/239^3) + ... = 3.14159... = \pi$[7]

Calculul în era calculatoarelor

Apariția calculatoarelor numerice în secolul al XX-lea au dus la o creștere a recordurilor de calcul al lui π. John von Neumann et al. au folosit ENIAC pentru a calcula 2037 de cifre ale lui π în 1949, un calcul care a durat 70 de ore.[44][45] Alte mii de zecimale s-au obținut în următoarele decenii și milionul de cifre a fost depășit în 1973. Progresele nu s-au datorat doar hardware-ului mai rapid, ci și apariției unor noi algoritmi. Una dintre cele mai semnificative realizări a fost descoperirea transformatei Fourier rapide (FFT) în anii 1960, algoritm ce permite calculatoarelor să efectueze rapid operațiuni aritmetice pe numere extrem de mari.

La începutul secolului al XX-lea, matematicianul indian Srinivasa Ramanujan a descoperit multe noi formule pentru π, unele remarcabile pentru eleganța și profunzimea lor matematică.[46] Una dintre formulele sale este seria

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

și cea similară găsită de frații Ciudnovski în 1987,

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}$$

care dau 14 cifre zecimale cu fiecare termen.[46] Frații Ciudnovski au folosit această formulă pentru a stabili câteva recorduri de calcul al lui π spre sfârșitul anilor 1980, inclusiv primul calcul cu peste un miliard (mai precis, 1.011.196.691) de cifre zecimale în 1989. Ea rămâne formula preferată pentru software-ul de calcul al lui π ce rulează pe calculatoarele personale, diferită de cele folosite de supercalculatoarele care au stabilit recorduri moderne.

În timp ce seriile de regulă măresc acuratețea cu o cantitate fixă pentru fiecare termen adunat, există algoritmi iterativi care *multiplică* numărul de zecimale exacte la fiecare pas, având dezavantajul că fiecare pas implică, de obicei, calcule costisitoare. O mare realizare în acest sens a venit în 1975, când Richard Brent și Eugene Salamin au descoperit independent algoritmul Brent–Salamin, algoritm pur aritmetic care dublează numărul de zecimale exacte la fiecare pas.[47] Algoritmul constă în inițializarea

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad t_0 = \frac{1}{4} \qquad p_0 = 1$$

și apoi în iterații

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2 \qquad p_{n+1} = 2p_n$$

efectuate până când a_n și b_n sunt suficient de apropiate. Atunci, estimarea lui π este dată de

$$\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}.$$

Folosind această schemă, 25 de iterații ajung pentru a atinge 45 de milioane de zecimale exacte. Un algoritm similar face acuratețea de 4 ori mai mare la fiecare pas și a fost descoperit de Jonathan și Peter Borwein.[48] Metodele au fost utilizate de Yasumasa Kanada și echipa sa pentru a stabili majoritatea recordurilor de calcul al lui π din 1980, până la calculul cu 206.158.430.000 de zecimale exacte în 1999. Recordul actual este de 2.576.980.370.000 de zecimale și a fost stabilit de Daisuke Takahashi pe sistemul T2K-Tsukuba, un supercalculator de la Universitatea Tsukuba, de la nord-est de Tokyo.[49]

O importantă descoperire recentă este formula Bailey–Borwein–Plouffe (formula BBP), descoperită de Simon Plouffe și care își trage numele de la autorii lucrării în care a fost publicată, David H. Bailey, Peter Borwein și Simon Plouffe.[50] Formula,

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

permite extragerea oricărei cifre hexazecimale sau binare a lui π fără a le calcula pe cele dinaintea ei.[50] Între 1998 și 2000, proiectul de calcul distribuit PiHex a utilizat o variantă a formulei BBP dezvoltată de Fabrice Bellard pentru a calcula bitul numărul 1.000.000.000.000.000 al lui π, care a fost 0.[51]

Dacă s-ar găsi o formulă de forma

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^{ck}} \frac{p(k)}{q(k)},$$

cu *b* și *c* numere întregi pozitive și cu *p* și *q* polinoame de grad fix cu coeficienți întregi (cum este cazul cu formula BPP de mai sus), ea ar deveni unul dintre cele mai eficiente mijloace de calcul a oricărei cifre a lui π din orice poziție în baza b^c fără a calcula toate cifrele anterioare în acea bază, într-un timp care depinde doar de dimensiunea numărului întreg *k* și de gradul fix al polinoamelor. Plouffe a descris astfel de formule ca fiind cele de interes pentru calculul numerelor de clasa **SC***, cu complexitate spațială logaritmic-polinomială și cu complexitate temporală aproape liniară, depinzând doar de ordinul de mărime al numărului *k*, necesitând resurse de calcul modeste. Formula anterioară (găsită de Plouffe pentru π cu *b*=2 și *c*=4, dar găsită nu doar pentru π, ci și pentru log(9/10) și pentru câteva alte constante iraționale), sugerează că π este un număr **SC***.

Pi și fracțiile continue

Șirul de numitori parțiali ai fracției continue simple a lui π nu prezintă niciun șablon evident:[4]

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \cdots]$$

sau

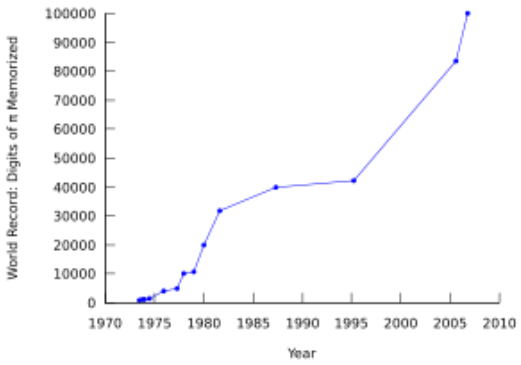
$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}}}}}}$$

Există, însă, fracții continue generalizate pentru π cu o structură perfect regulată, cum ar fi:

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}} = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \ddots}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \ddots}}}}}$$

Memorarea cifrelor

Chiar cu mult timp înainte ca valoarea lui π să fie evaluată de calculatoarele electronice, memorarea unui număr *record* de cifre a devenit o obsesie a unor oameni. În 2006, Akira Haraguchi, un inginer japonez pensionar, s-a lăudat cu reținerea a 100.000 de zecimale exacte.[52] Aceasta nu a fost însă verificată de Guinness World Records. Recordul înregistrat de Guinness la memorarea cifrelor lui π este de 67.890 de cifre, deținut de Lu Chao, un student de 24 de ani din China.[53] I-au luat 24 de ore și 4 minute să recite fără greșeală până la a 67.890-a cifră zecimală a lui π.[54]



În ultimele decenii a crescut mult recordul numărului de cifre memorate.

Există mai multe moduri de memorare a lui π, printre care și utilizarea de „pieme”, poezii care reprezintă numărul π astfel încât lungimea fiecărui cuvânt (în litere) reprezintă o cifră. Un astfel de exemplu de piemă, compus de Sir James Jeans: *How I need* (sau: *want*) *a drink, alcoholic in nature* (sau: *of course*), *after the heavy lectures* (sau: *chapters*) *involving quantum mechanics*.[55][56] Primul cuvânt are 3 litere, al doilea are una, al treilea are 4, al patrulea 1, al cincilea 5, și așa mai departe.[57] Echivalent, în limba română există fraza: „Așa e bine a scrie renumitul și utilul număr”. O altă variantă, mai exactă (o zecimală în plus) este: „Dar e bine a căuta lucrurile de foarte multe ori”, iar o altă variantă, tot în limba română,

este: „*Dar, e bine a vedea lucrurile de foarte multe ori*” (3,141592653). *Cadaeic Cadenza* conține în acest fel primele 3834 de cifre ale lui π.[58] Piemele fac parte din întregul domeniu de studiu al mnemotehnicilor pentru reținerea cifrelor lui π.

Proprietăți avansate

Aproximări numerice

Din cauza naturii transcendente a lui π, nu există expresii cu formă închisă pentru acest număr în termeni de numere și funcții algebrice.[17] Printre formulele de calcul al lui π cu ajutorul aritmeticii elementare se numără seriile care dau un șir infinit de aproximări ale lui π.[59] Cu cât se includ mai mulți termeni într-un calcul, cu atât mai aproape de π va fi rezultatul.

De aceea, calculele numerice trebuie să folosească aproximări ale lui π. Pentru multe scopuri, 3,14 sau $^{22}/_{7}$ este o aproximare suficientă, deși inginerii folosesc adesea 3,1416 (4 zecimale exacte) sau 3,14159 (5 zecimale exacte) pentru mai multă precizie. Aproximările $^{22}/_{7}$ și $^{355}/_{113}$, cu 2, respectiv 6 zecimale exacte, se obțin din dezvoltarea în fracții continue simple a lui π. Aproximarea $^{355}/_{113}$ (3.1415929…) este cea mai bună aproximare ce poate fi exprimată cu un numărător și un numitor de 3 sau 4 cifre; următoarea aproximare acceptabilă este $^{103993}/_{33102}$ (3.14159265301...) și necesită numere mult mai mari, din cauza structurii dezvoltării în fracție continuă.[3]

Prima aproximare numerică a lui π este aproape sigur valoarea 3.[37] În cazuri în care nu se cere precizie mare, ar putea fi chiar acceptabilă. Faptul că 3 este o rotunjire prin lipsă rezultă din faptul că este raportul dintre perimetrul unui hexagon regulat înscris și diametrul cercului circumscris lui.

Întrebări deschise

Cea mai presantă întrebare deschisă despre π este dacă este număr normal—adică dacă orice bloc de cifre ce apare în π la fel de des ca în cazul unui număr generat „aleator”, și dacă aceasta este adevărată în *orice* bază întreagă de numerație, nu doar în baza 10.[60] Actualmente nu se știe foarte mult; nu se cunoaște nici care dintre cifrele 0,…,9 apar infinit de des în expresia zecimală a lui π.[61]

Bailey și Crandall au demonstrat în 2000 că din existența formulei Bailey-Borwein-Plouffe menționată mai sus și a altora similare rezultă că normalitatea în baza 2 a lui π și a altor constante se poate reduce la o conjectură plauzibilă din teoria haosului.[62]

Nu se cunoaște nici dacă π și *e* sunt independente algebric, deși Iuri Nesterenko a demonstrat independența algebrică a numerelor {π, e^{π}, Γ(1/4)} în 1996.[63]

Utilizare în matematică și științe

π este omniprezent în matematică, apărând chiar și în locuri fără o legătură evidentă cu cercurile din geometria euclidiană.[64]

Geometrie și trigonometrie

Pentru orice cerc de rază r și diametru $d = 2r$, circumferința este πd și aria este πr^2. Mai mult, π apare în formulele pentru arie și volum al multor forme geometrice bazate pe cerc, cum ar fi elipsa, sfera, conul și torul.[65] Astfel, π apare în integralele definite care descriu circumferința, aria sau volumul unor forme generate de cercuri. În acest caz simplu, jumătate din aria discului unitate este dată de:[66]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

și

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$$

dă jumătate din circumferința cercului unitate.[65] Forme mai complicate pot fi integrate ca corpuri de rotație.[67]

De la definiția pe cercul unitate a funcțiilor trigonometrice rezultă și că sinusul și cosinusul au perioada 2π. Astfel, pentru orice x real și orice număr întreg n, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$ și $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$. Deoarece $\sin(0) = 0$, $\sin(2\pi n) = 0$ oricare ar fi un număr întreg n. De asemenea, măsura unui unghi de 180° este egală cu π radiani. Cu alte cuvinte, 1° = (π/180) radiani.

În matematica modernă, π este adesea *definit* cu ajutorul funcțiilor trigonometrice, de exemplu ca cel mai mic număr pozitiv x pentru care $\cos x = 0$, pentru a evita dependența nenecesară de subtilitățile geometriei euclidiene și ale integrării. Echivalent, π poate fi definit cu ajutorul funcțiilor trigonometrice inverse, de exemplu care $\pi = 2\arccos(0)$ sau $\pi = 4\arctan(1)$. Expanding inverse trigonometric functions as power series is the easiest way to derive infinite series for π.

Numere complexe și analiza matematică

Un număr complex z poate fi exprimat în coordonate polare după cum urmează:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Apariția frecventă a lui π în analiza complexă poate fi legată de comportamentul funcției exponențiale de variabilă complexă, descrisă de formula lui Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

unde i este unitatea imaginară ce satisface relația $i^2 = -1$ și $e \approx 2.71828$ este numărul lui Euler. Din această formulă rezultă că puterile imaginare ale lui e descriu rotații pe cercul unitate în planul complex; aceste rotații au o perioadă de 360° = 2π. În particular, rotația cu 180° $\varphi = \pi$ are ca rezultat remarcabila identitate a lui Euler

$$e^{i\pi} = -1.$$

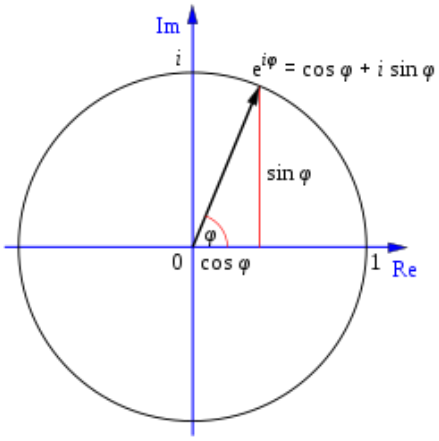
Există n rădăcini diferite de ordin n ale unității

$$e^{2\pi ik/n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Integrala gaussiană

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

O consecință este că funcția gamma a semiîntregilor este un multiplu rațional de √π.



Formula lui Euler în planul complex. Creșterea unghiului φ la π radiani (180°) dă identitatea lui Euler.

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Identitatea lui Euler este celebră pentru că leagă câteva constante și operatori matematici de bază.

Fizică

Deși nu este o constantă fizică, π apare frecvent în ecuații ce descriu principii fundamentale ale Universului, datorită relației sale cu natura cercului și, prin aceasta, de sistemul de coordonate polare. Utilizarea unor construcții cum ar fi unitățile Planck pot uneori să-l elimine pe π din formule.

- Constanta cosmologică:[68]

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho$$

- Principiul de incertitudine al lui Heisenberg, care arată că incertitudinea măsurării poziției unei particule (Δ*x*) și a impulsului (Δ*p*) nu pot fi ambele oricât de mici în același timp:[69]

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

- Ecuațiile lui Einstein din teoria relativității generale:[70]

$$R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

- Legea lui Coulomb pentru forța electrică, descriind forțele ce acționează între două sarcini electrice (q_1 și q_2) aflate la o distanță relativă *r*:[71]

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- permeabilitatea magnetică a vidului:[72]

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$$

- Constanta legii a treia a lui Kepler, ce leagă perioada orbitală (*P*) și axa semimajoră (*a*) de masele (*M* și *m*) a două corpuri pe orbită unul în jurul altuia:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{G(M+m)}$$

Statistică și probabilități

În statistică și probabilități, există mai multe distribuții ale căror formule conțin π, printre care:

- funcția de densitate de probabilitate pentru distribuția normală cu media μ și deviația standard σ, datorită integralei gaussiene:[73]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

- funcția de densitate de probabilitate pentru distribuția Cauchy (standard):[74]

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Întrucât $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ pentru orice funcție de densitate de probabilitate *f*(*x*), formulele de mai sus se pot utiliza pentru a produce alte formule integrale pentru π.[75]

Acul lui Buffon este o problemă adesea folosită pentru aproximarea empirică a lui π. Dacă se aruncă un ac de lungime *L* în mod repetat pe o suprafață cu linii paralele aflate la *S* unități de lungime distanță (cu *S* > *L*). Dacă acul este aruncat de *n* ori și de *x* ori dintre acestea el intersectează o linie dreaptă (*x* > 0), atunci se poate aproxima π cu ajutorul metodei Monte Carlo:[76][77][78][79]

$$\pi \approx \frac{2nL}{xS}.$$

Deși acest rezultat este impecabil din punct de vedere matematic, el nu poate fi folosit pentru a determina mai mult de câteva cifre ale lui π *prin experiment*. Obținerea a doar trei cifre (inclusiv "3"-ul care este partea întreagă) corecte cu siguranță necesită milioane milioane de aruncări,[76] și numărul de aruncări crește exponențial cu numărul de cifre dorit. Mai mult, orice greșeală de măsurare a lungimilor *L* și *S* se va transforma direct într-o eroare de aproximare a lui π. De exemplu, o diferență de un singur atom în lungimea unui ac de 10 centimetri va apărea la a 9-a cifră a rezultatului. În practică, incertitudinea de a determina dacă acul intersectează sau nu o linie când el pare să o atingă exact va limita acuratețea rezultatului la mai puțin de 9 cifre.

Notarea lui 2π cu τ

O alternativă la π este notația τ, pentru raportul între circumferința cercului și raza sa (în loc de diametru), echivalent cu 2π.[80] Această constantă reprezintă numărul de radiani al unui cerc, astfel că unghiul la centru care determină un sector de cerc este raportul între lungimea sectorului respectiv și cerc înmulțit cu τ radiani. Susținătorii lui tau afirmă că această relație directă simplifică studiul unghiurilor exprimate în radiani față de cazul în care s-ar utiliza π, unde fracția trebuie înmulțită și cu 2.[81] Deși în mod convențional ca produsul "2π", τ apare în multe formule des folosite.[82][83]

Ziua pi

Fascinația pentru numărul Pi a intrat și în cultura populară. Poate din cauza simplității definiției sale, conceptul de pi și, mai ales, expresia sa zecimală au pătruns în cultura populară într-un grad mult mai mare decât aproape orice altă construcție matematică.[84] Este, probabil, cel mai semnificativ element pe care îl au în comun matematicienii și non-matematicienii.[85] Relatările în presă despre noile calcule precise ale lui π (și alte tentative similare) sunt frecvente.[86].

La 7 noiembrie 2005, Kate Bush a lansat albumul, "Aerial" care conține cântecul "π" ale cărui versuri constau din cifrele lui π, începând cu „3,14”[87]

O farfurie cu π
Joc de cuvinte: *π* se pronunță în engleză *pai*, asemenea cu *pie*, care înseamnă *turtă, pateu, plăcintă*.

În urmă cu 25 de ani ziua de 14 martie a fost declarată de către Camera Reprezentanților din Statele Unite drept "Ziua numărului Pi" ("The Pi Day"), deoarece această dată din calendar se scrie "3/14". Ziua numărului Pi este celebrată în special în țările anglo-saxone, dar a început de curând să fie sărbătorită și în alte state. [88].

Ziua pi este sărbătorită în școli[89] și universități. Mai multe scandări de la MIT includ „3,14159!”[90].

Note

1. **^** Alexander D. Poularikas (1999). *The handbook of formulas and tables for signal processing* (http://books.google.com/books?id=aaStYSe6WVcC&pg=PT165&dq=11.001001+different-number-bases&ei=FBXiStjlIZKalASsgoWjDA#v=onepage&q=11.001001%20different-number-bases&f=false). CRC Press. p. 9.8. ISBN 9780849385797.
2. **^** „Sample digits for hexa decimal digits of pi” (http://www.super-computing.org/pi-hexa_current.html). 6 decembrie 2002.
3. ^ ***a*** ***b*** Gourdon, Xavier; Pascal Sebah. „Collection of approximations for π” (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piApprox.html). Numbers, constants and computation. Accesat în 8 noiembrie 2007.
4. ^ ***a*** ***b*** A001203 (https://oeis.org/A001203): Continued fraction for Pi, On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
5. **^** Howard Whitley Eves (1969). *An Introduction to the History of Mathematics* (http://books.google.com/books?id=LIsuAAAAIAAJ&q=%22important+numbers+in+mathematics%22&dq=%22important+numbers+in+mathematics%22&pgis=1). Holt, Rinehart & Winston.

6. **^** Comanor, Milton; Ralph P. Boas (1976). „Pi”. În William D. Halsey. *Collier's Encyclopedia*. **19**. New York: Macmillan Educational Corporation. pp. 21–22.
7. ^ ***a*** ***b*** ***c*** ***d*** ***e*** „About Pi” (http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pi.html). *Ask Dr. Math FAQ*. Accesat în 29 octombrie 2007.
8. **^** „Characters Ordered by Unicode” (http://www.w3.org/TR/MathML2/bycodes.html). W3C. Accesat în 25 octombrie 2007.
9. **^** Richmond, Bettina (12 ianuarie 1999). „Area of a Circle” (http://www.wku.edu/~tom.richmond/Pir2.html). Western Kentucky University. Accesat în 4 noiembrie 2007.
10. **^** Rudin, Walter (1976) [1953]. *Principles of Mathematical Analysis* (ed. 3e). McGraw-Hill. p. 183. ISBN 0-07-054235-X.
11. **^** Glimpses in the history of a great number: Pi in Arabic mathematics (http://www.muslimheritage.com/topics/default.cfm?TaxonomyTypeID=12&TaxonomySubTypeID=59&TaxonomyThirdLevelID=-1&ArticleID=997) de Mustafa Mawaldi
12. **^** Commentariu la Mishna, începutul lui Eruvin
13. **^** Lambert, Johann Heinrich (1761). „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques”. *Histoire de l'Académie,*. **XVII**. Berlin (publicat la 1768). pp. 265–322.
14. **^** Niven, Ivan (1947). „A simple proof that π is irrational” (http://www.ams.org/bull/1947-53-06/S0002-9904-1947-08821-2/S0002-9904-1947-08821-2.pdf) (PDF). *Bulletin of the American Mathematical Society*. **53** (6): 509. doi:10.1090/S0002-9904-1947-08821-2 (https://doi.org/10.1090%2FS0002-9904-1947-08821-2). Accesat în 4 noiembrie 2007.
15. **^** Richter, Helmut (28 iulie 1999). „Pi Is Irrational” (https://archive.is/8OTC). Leibniz Rechenzentrum. Arhivat din original (http://www.lrz-muenchen.de/~hr/numb/pi-irr.html) la 5 august 2012. Accesat în 4 noiembrie 2007.
16. **^** Jeffreys, Harold (1973). *Scientific Inference* (ed. 3rd). Cambridge University Press.
17. ^ ***a*** ***b*** Mayer, Steve. „The Transcendence of π” (http://dialspace.dial.pipex.com/town/way/po28/maths/docs/pi.html). Accesat în 4 noiembrie 2007.
18. **^** „Squaring the Circle” (http://www.cut-the-knot.org/impossible/sq_circle.shtml). cut-the-knot. Accesat în 4 noiembrie 2007.
19. **^** A000796 (https://oeis.org/A000796): Decimal expansion of Pi, On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
20. **^** „Current publicized world record of pi” (http://www.super-computing.org/pi_current.html). Accesat în 14 octombrie 2007.
21. **^** Young, Robert M. (1992). *Excursions in Calculus* (http://books.google.com/books?id=iEMmV9RWZ4MC&pg=PA238&dq=intitle:Excursions+intitle:in+intitle:Calculus+39+digits&lr=&as_brr=0&ei=AeLrSNKJOYWQtAPdt5DeDQ&sig=ACfU3U0NSYsF9kVp6om4Zyw3a7F82QCofQ). Washington: Mathematical Association of America (MAA). p. 417. ISBN 0883853175.
22. **^** „Statistical estimation of pi using random vectors” (http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=AJPIAS000067000004000298000001&idtype=cvips&gifs=yes). Accesat în 12 august 2007.
23. **^** Eric W. Weisstein, *Pi Digits (http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html)* la MathWorld.
24. **^** Boutin, Chad (26 aprilie 2005). „Pi seems a good random number generator - but not always the best” (http://www.purdue.edu/UNS/html4ever/2005/050426.Fischbach.pi.html). Universitatea Purdue. Accesat în 4 noiembrie 2007.
25. **^** Groleau, Rick (septembrie 2003). „Infinite Secrets: Approximating Pi” (http://www.pbs.org/wgbh/nova/archimedes/pi.html). NOVA. Accesat în 4 noiembrie 2007.
26. **^** Beckmann, Petr (1989). *A History of Pi*. Barnes & Noble Publishing. ISBN 0880294183.
27. **^** Eymard, Pierre; Jean-Pierre Lafon (2004). „2.6”. *The Number π* (http://books.google.com/books?id=qZcCSskdtwcC&pg=PA53&dq=leibniz+pi&ei=uFsuR5fOAZTY7QLqouDpCQ&sig=k8VlN5VTxcX9a6Ewc71OCGe_5jk). Stephen S. Wilson (translator). American Mathematical Society. p. 53. ISBN 0821832468. Accesat în 4 noiembrie 2007.
28. **^** Lampret, Spanish, Vito (2006). „Even from Gregory-Leibniz series π could be computed: an example of how convergence of series can be accelerated” (http://www.scm.org.co/Articulos/832.pdf) (PDF). *Lecturas Mathematicas*. **27**: 21–25. Accesat în 4 noiembrie 2007.
29. **^** A. van Wijngaarden, in: Cursus: Wetenschappelijk Rekenen B, Process Analyse, Stichting Mathematisch Centrum, (Amsterdam, 1965) pp. 51–60.
30. **^** Petrie, W.M.F. 1940 Wisdom of the Egyptians: pp 27
31. **^** Edwards. I.E.S. 1979: The Pyramids of Egypt: pp269
32. **^** Jackson și Stamp (2002) Pyramid: Beyond Imagination. pp153
33. **^** Lightbody, D.I. 2008. Egyptian Tomb Architecture: The Archaeological Facts of Pharaonic Circular Symbolism. British Archaeological Reports. pp36
34. **^** Beckmann, Petr (1976). *A History of π*. St. Martin's Griffin. ISBN 0-312-38185-9.
35. **^** „Archimedes' constant π” (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/pi.html). Accesat în 4 noiembrie 2007.

36. **^** Aleff, H. Peter. „Ancient Creation Stories told by the Numbers: Solomon's Pi” (http://www.recoveredscience.com/const303solomonpi.htm). recoveredscience.com. Accesat în 30 octombrie 2010.
37. ^ ***a*** ***b*** ***c*** ***d*** O'Connor, J J; E F Robertson (august 2001). „A history of Pi” (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html). Accesat în 30 octombrie 2010.
38. **^** Bal Sandesh (http://www.math.missouri.edu/~hema/balsabha/BalSandesh/Sandesh%20V7N2May04.pdf)
39. **^** George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy (1999). *Special Functions*. Cambridge University Press. p. 58. ISBN 0521789885.
40. **^** Gupta, R. C. (1992). „On the remainder term in the Madhava-Leibniz's series”. *Ganita Bharati*. **14** (1–4): 68–71.
41. **^** Charles Hutton (1811). *Mathematical Tables; Containing the Common, Hyperbolic, and Logistic Logarithms..* (http://books.google.com/books?id=zDMAAAAAQAAJ&pg=PA13&dq=snell+descartes+date:0-1837&lr=&as_brr=1&ei=rqPgR7yeNqiwtAPDvNEV) London: Rivington. p. 13.
42. **^** The New York Times: Even Mathematicians Can Get Carried Away (http://query.nytimes.com/gst/fullpage.html?res=9B0DE0DB143FF93BA35750C0A961948260)
43. **^** „About: William Jones” (http://www.famousWelsh.com/cgibin/getmoreinf.cgi?pers_id=737). *Famous Welsh*. Accesat în 27 octombrie 2007.
44. **^** "An {ENIAC} Determination of pi and e to more than 2000 Decimal Places", Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 4 (29), pp. 11–15. (ianuarie 1950)
45. **^** "Statistical Treatment of Values of First 2,000 Decimal Digits of e and of pi Calculated on the ENIAC", Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 4 (30), pp. 109–111. (aprilie 1950)
46. ^ ***a*** ***b*** „The constant π: Ramanujan type formulas” (http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piramanujan.html). Accesat în 4 noiembrie 2007.
47. **^** Brent, Richard (1975). Traub, J F, ed. „Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation” (http://www.maths.anu.edu.au/~brent/pub/pub028.html). *Analytic Computational Complexity*. New York: Academic Press. pp. 151–176. Accesat în 8 septembrie 2007.
48. **^** Borwein, Jonathan M; Borwein, Peter; Berggren, Lennart (2004). *Pi: A Source Book*. Springer. ISBN 0387205713.
49. **^** Pi-obsessed Japanese reach 2.5 trillion digits | Crave - CNET (http://news.cnet.com/8301-17938_105-10313808-1.html)
50. ^ ***a*** ***b*** Bailey, David H.; Borwein, Peter B.; and Plouffe, Simon (1997). „On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants” (http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/digits.pdf) (PDF). *Mathematics of Computation*. **66** (218): 903–913. doi:10.1090/S0025-5718-97-00856-9 (https://doi.org/10.1090%2FS0025-5718-97-00856-9).
51. **^** Bellard, Fabrice. „A new formula to compute the n^{th} binary digit of pi” (http://web.archive.org/20070309193622/fabrice.bellard.free.fr/pi/pi_bin/pi_bin.html). Arhivat din original (http://fabrice.bellard.free.fr/pi/pi_bin/pi_bin.html) la 9 martie 2007. Accesat în 27 octombrie 2007.
52. **^** Otake, Tomoko (17 decembrie 2006). „How can anyone remember 100,000 numbers?” (https://archive.is/egvQ). *The Japan Times*. Arhivat din original (http://search.japantimes.co.jp/print/fl20061217x1.html) la 14 iulie 2012. Accesat în 27 octombrie 2007.
53. **^** „Pi World Ranking List” (http://www.pi-world-ranking-list.com/news/index.htm). Accesat în 27 octombrie 2007.
54. **^** „Chinese student breaks Guiness record by reciting 67,890 digits of pi” (http://www.newsgd.com/culture/peopleandlife/200611280032.htm). *News Guangdong*. 28 noiembrie 2006. Accesat în 27 octombrie 2007.
55. **^** Weisstein, Eric W. "Pi Wordplay." (http://mathworld.wolfram.com/PiWordplay.html) From MathWorld--A Wolfram Web Resource. Accesată la data de: 12 martie 2009
56. **^** Borwein, Jonathan M (25 octombrie 2005). „The Life of Pi: From Archimedes to Eniac and Beyond” (http://users.cs.dal.ca/~jborwein/pi-culture.pdf) (PDF). Dalhousie University Computer Science. Accesat în 29 octombrie 2007.
57. **^** Can I have a small container of coffee? (http://www.uz.ac.zw/science/maths/zimaths/pimnem.htm), revista „*Zimaths*”, Universitatea din Zimbabwe. Accesată la data de: 14 decembrie 2009.
58. **^** Keith, Mike. „Cadaeic Cadenza Notes & Commentary” (http://www.cadaeic.net/comments.htm). Accesat în 29 iulie 2009.
59. **^** Weisstein, Eric W (27 septembrie 2007). „Pi Formulas” (http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html). MathWorld. Accesat în 10 noiembrie 2007.
60. **^** Weisstein, Eric W (22 decembrie 2005). „Normal Number” (http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html). MathWorld. Accesat în 10 noiembrie 2007.

51. **^** Preuss, Paul (23 iulie 2001). „Are The Digits of Pi Random? Lab Researcher May Hold The Key” (http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/pi-random.html). Lawrence Berkeley National Laboratory. Accesat în 10 noiembrie 2007.
52. **^** Peterson, Ivars (1 septembrie 2001). „Pi à la Mode: Mathematicians tackle the seeming randomness of pi's digits” (http://www.sciencenews.org/articles/20010901/bob9.asp). *Science News Online*. Accesat în 10 noiembrie 2007.
53. **^** Nesterenko, Iuri V (1996). „Funcții modulare și probleme de transcendență”. *Comptes rendus de l'Académie des sciences Série 1*. **322** (10): 909–914.
54. **^** „Japanese breaks pi memory record” (http://news.bbc.co.uk/1/hi/world/asia-pacific/4644103.stm). *BBC News*. 2 iulie 2005. Accesat în 30 octombrie 2010.
55. ^ ***a*** ***b*** „Area and Circumference of a Circle by Archimedes” (http://www.math.psu.edu/courses/maserick/circle/circleapplet.html). Penn State. Accesat în 8 noiembrie 2007.
56. **^** Weisstein, Eric W (28 ianuarie 2006). „Unit Disk Integral” (http://mathworld.wolfram.com/UnitDiskIntegral.html). MathWorld. Accesat în 8 noiembrie 2007.
57. **^** Weisstein, Eric W (4 mai 2006). „Solid of Revolution” (http://mathworld.wolfram.com/SolidofRevolution.html). MathWorld. Accesat în 8 noiembrie 2007.
58. **^** Miller, Cole. „The Cosmological Constant” (http://www.astro.umd.edu/~miller/teaching/astr422/lecture12.pdf) (PDF). Universitatea Maryland. Accesat în 8 noiembrie 2007.
59. **^** Imamura, James M (17 august 2005). „Heisenberg Uncertainty Principle” (http://zebu.uoregon.edu/~imamura/208/jan27/hup.html). Universitatea Oregon. Accesat în 9 noiembrie 2007.
70. **^** Einstein, Albert (1916). „The Foundation of the General Theory of Relativity” (http://www.alberteinstein.info/gallery/gtext3.html) (PDF). *Annalen der Physik*. Accesat în 9 noiembrie 2007.
71. **^** Nave, C. Rod (28 iunie 2005). „Coulomb's Constant” (http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/elefor.html#c3). *HyperPhysics*. Universitatea de Stat Georgia. Accesat în 9 noiembrie 2007.
72. **^** „Magnetic constant” (http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mu0). NIST: Valori recomandate de CODATA. 2006. Accesat în 9 noiembrie 2007.
73. **^** Weisstein, Eric W (7 octombrie 2004). „Gaussian Integral” (http://mathworld.wolfram.com/GaussianIntegral.html). MathWorld. Accesat în 8 noiembrie 2007.
74. **^** Weisstein, Eric W (11 octombrie 2005). „Cauchy Distribution” (http://mathworld.wolfram.com/CauchyDistribution.html). MathWorld. Accesat în 8 noiembrie 2007.
75. **^** Weisstein, Eric W (2 iulie 2003). „Probability Function” (http://mathworld.wolfram.com/ProbabilityFunction.html). MathWorld. Accesat în 8 noiembrie 2007.
76. ^ ***a*** ***b*** Weisstein, Eric W (12 decembrie 2005). „Buffon's Needle Problem” (http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html). MathWorld. Accesat în 10 noiembrie 2007.
77. **^** Bogomolny, Alex (august 2001). „Math Surprises: An Example” (http://www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml). *cut-the-knot*. Accesat în 28 octombrie 2007.
78. **^** Ramaley, J. F. (1969). „Buffon's Noodle Problem”. *The American Mathematical Monthly*. **76** (8): 916–918. doi:10.2307/2317945 (https://doi.org/10.2307%2F2317945).
79. **^** „The Monte Carlo algorithm/method” (http://www.datastructures.info/the-monte-carlo-algorithmmethod/). *datastructures*. 9 ianuarie 2007. Accesat în 7 noiembrie 2007.
80. **^** Palais, Robert. „Pi is Wrong!” (http://www.math.utah.edu/~palais/pi.html) [Pi e greșit!]. Accesat în 15 martie 2011.
81. **^** Michael Hartl. „The Tau Manifesto” (http://tauday.com/) [Manifestul Tau]. Accesat în 9 iulie 2011.
82. **^** Palais, Robert (2001). „π Is Wrong!” (http://www.math.utah.edu/%7Epalais/pi.pdf) [Pi e greșit!] (PDF). *The Mathematical Intelligencer*. **23** (3): 7–8. doi:10.1007/BF03026846 (https://doi.org/10.1007%2FBF03026846). Accesat în 3 iulie 2011.
83. **^** Harremoes, Peter. „Al-Kashi's constant τ” (http://www.harremoes.dk/Peter/Undervis/Turnpage/Turnpage1.html) [Constanta lui Al-Kashi τ]. Accesat în 9 iulie 2011.
84. **^** Vezi, de exemplu, Lennart Berggren, Jonathan M. Borwein și Peter B. Borwein (eds.), *Pi: A Source Book*. Springer, 1999 (2nd ed.). ISBN 978-0-387-98946-4.
85. **^** Vezi Alfred S. Posamentier și Ingmar Lehmann, *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books, 2004. ISBN 978-1-59102-200-8.
86. **^** *E.g.*, MSNBC, Man recites pi from memory to 83,431 places (http://www.msnbc.msn.com/id/8456677/) 3 iulie 2005; Matt Schudel, Obituaries: "John W. Wrench, Jr.: Mathematician Had a Taste for Pi" *The Washington Post*, 25 martie 2009, p. B5.
87. **^** BBC News - 3.14 and the rest (http://news.bbc.co.uk/1/hi/magazine/7296224.stm)
88. **^** Bădescu, Florin: *Ziua numărului Pi, celebrată pe plan mondial, pe 14 martie*, „Ziarul financiar”, 14 martie 2013 [1] (http://www.zf.ro/eveniment/ziua-numarului-pi-celebrata-pe-plan-mondial-pe-14-martie-10668202/) Accesat: 14 martie 2016.

89. ^ Pi Day activities (http://www.piday.org/discussions/teachers-what-are-the-most-successful-pi-day-activities)
90. ^ MIT, E to the U (http://web.mit.edu/cheer/2004-2005SpecificWebPages/GeneralInformation/cheers.html).

Bibliografie

- Beckmann, Petr (1976). *A History of π*. St. Martin's Griffin. ISBN 0-312-38185-9.
- Câmpan, Florica (1965), *Istoria numarului Pi*, București: Editura Tineretului, OCLC 634931920 (https://www.worldcat.org/oclc/634931920)
- Câmpan, Florica (1977), *Povestea numarului Pi* (ed. a doua, revizuită și adăugită), București: Editura Albatros, OCLC 3708207 (https://www.worldcat.org/oclc/3708207)
- „100 de personalități care au schimbat destinul lumii - Arhimede" (http://www.scribd.com/doc/39624102/008-Arhimede) (8). DeAgostini. 27 noiembrie 2007. ISSN 1791-0765 (https://www.worldcat.org/issn/1791-0765).
- Arndt, Jörg și Haenel, Christoph (2000). *Π [Pi], Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 3-540-66258-8.
- Delahaye, Jean-Paul (2000). *Le fascinant nombre π* (ed. Belin, Pour la Science). 2-902918-25-9.
- Jukov, A. (2007). *Вездесущее число «пи» (Numărul omniprezent Pi)*. LKI. 5-94057-030-5.

Legături externe

- π = 4.000 de ani (http://www.jurnalul.ro/jurnalul-national/4-000-de-ani-318400.htm), 17 ianuarie 2009, Anca Aldea, *Jurnalul Național*

Adus de la https://ro.wikipedia.org/w/index.php?title=Pi&oldid=13375284

Ultima editare a paginii a fost efectuată la 18 aprilie 2020, ora 22:33.

Acest text este disponibil sub licența Creative Commons cu atribuire și distribuire în condiții identice; pot exista și clauze suplimentare. Vedeți detalii la Termenii de utilizare.